BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2009

АЛГОРИТМ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ИЗМЕРЕНИЙ

М.Ф.РАДЖАБОВ

Институт Прикладной Математики БГУ

Приводится обратная задача измерений для многомерного случая. С помощью соответствующих преобразований решение обратной задачи измерений сводится к решению соответствующего уравнения Винера-Хопфа. Далее, используя факторизации полиномиальных и сепарации дробно-рациональных матриц приводится решение обратной задачи измерений при помощи параметризации использованных для построения оптимальных регуляторов.

Обратная задача измерений является одним из актуальных направлений сигналов [2,3], где для ее решений разработаны разные алгоритмы для одномерного случая [4-6].

Когда рассматривается многомерный случай, то использование метода [5,6] сталкивается с трудностями, и поэтому более гибким является частотный метод синтеза, рассмотренный в работах [7,8].

В данной работе делаются попытки распространения методов [1,8] для решения многомерной обратной задачи измерений.

Обратную задачу измерений для многомерного случая формулируем следующим образом, т.е. пусть имеется

$$y(s) = A(s)x(s) + \gamma(s), \qquad (1)$$

где A - матрица преобразования процесса $x(s)$; векторы $x(s)$ и $y(s)$ являются изображениями Лапласа и имеют размеры $m \times 1$ и $n \times 1$, соответственно; $\gamma(s)$ - n - мерный вектор, погрешность, приведенная к выходу средства измерения.

Требуется найти такую матрицу H, соответствующей размерности $m \times n$,

$$\hat{x}(s) = H(s)y(s), \qquad (2)$$

чтобы функционал

$$J = \langle (x(s) - \hat{x}(s))' Q (x(s) - \hat{x}(s)) \rangle = \langle e'(s) Q e(s) \rangle \qquad (3)$$

достигал минимума, где $\hat{x}(s)$ - наблюдаемый вектор размерностью $m \times 1$, “$< >$” - знак математического ожидания, $e(s)$ - разность исходного сигнала с желаемым.

Для того чтобы использовать аналогичный метод синтеза [9,10] сделаем соответствующие преобразования. Действительно легко показывается, что уравнение (1) можно привести к виду

$$y(s) = A(s)e(s) + A(s)\hat{x}(s) + \gamma(s), \qquad (4)$$

а соотношение (3) переходит к виду

$$e(s) = -H(s)y(s) + x(s). \qquad (5)$$

Тогда, используя MFD представление [7]

$$A(s) = P^{-1}(s)M(s), \qquad (6)$$

можем выразить (4) в следующем виде

$$P(s)y(s) = M(s)e(s) + \psi(s), \qquad (7)$$

где

$$\psi(s) = M(s)\hat{x}(s) + P(s)\gamma(s).$$

Таким образом, имеем вариационную задачу (7), (5), (3) аналогичную задаче оптимального синтеза [8], т.е. требуется найти закон (5), минимизирующий функционал (3) при асимптотической устойчивости замкнутой системы (7)+(5).

Упрощенную схему обратной задачи приведем в следующем виде:

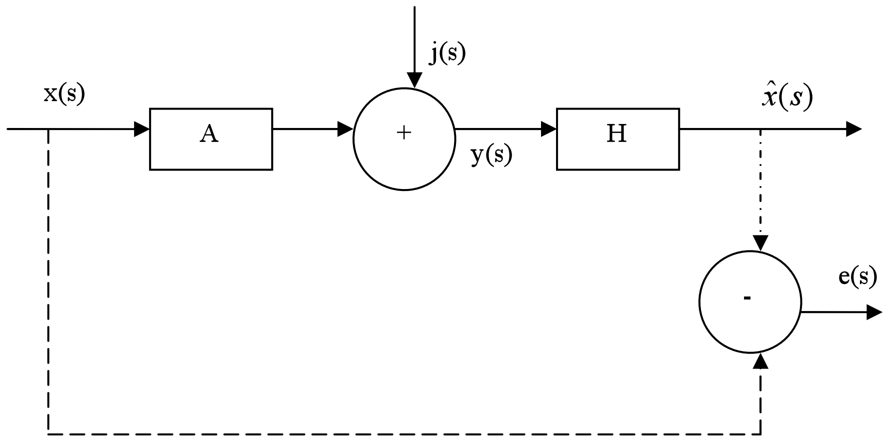

Рис. 1. Упрощенная схема обратной задачи в многомерном случае.

Введем матрицу передаточной функции $F_y(s)$, $F_e(s)$ между координатами $y(s)$, $e(s)$ и внешним возмущением $\psi(s)$

$$\left.\begin{aligned} y(s) &= F_y(s)\psi(s) \\ e(s) &= F_e(s)\psi(s) \end{aligned}\right\}, \qquad (8)$$

которая согласно (7), (5) определяется формулами (далее аргумент s опускается)

$$F_y = (P + MH)^{-1}, \qquad F_e = -H(P + MH)^{-1}, \qquad (9)$$

здесь ψ имеет спектральную плотность S_ψ. Как в [8], используя преобразование Фурье, функционал (3) можно представить в следующем виде:

$$J = \frac{1}{i}\int_{-i\infty}^{i\infty} S_p\left[(F_{e*}CF_e)S_\psi\right]ds. \qquad (10)$$

Таким образом, требуется определить H из (5) так, чтобы замкнутая система (7)+(5) была асимптотически устойчива и функционал (10) достигал минимума.

Уже для решения обратной задачи (8), (10) можно использовать результаты [8]. Тогда искомый $H(s)$ из (5) имеет вид [1,10]:

$$H = \left[(K_0 + K_+)\Gamma^{-1}M - WB_1\right]^{-1}\left[(K_0 + K_+)\Gamma^{-1}P + WA_1\right], \qquad (11)$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\Delta p(s) = \det P, \quad N = \Delta p(s)P^{-1}M, \quad Q = \Delta p(s)B_1 + A_1N, \\ &G_*G = \Delta p^*(s)C\Delta p(s), \quad S_{\psi 1} = \Gamma\Gamma_*, \quad W_*W = Q_*^{-1}G_*GQ^{-1}, \\ &K_0 + K_+ + K_- = H_*^{-1}(Q_*^{-1}N_*R - H_*HA)P^{-1}\Gamma; \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

матрицы Γ, H, G вместе обратными являются аналитическими в правой полуплоскости и действительные; элементы матрицы K_0 - целые части (полиномы от s), K_+-правильные дроби (дробно рациональные матрицы) с полюсами только в левой полуплоскости, K_-- правильные дроби с полюсами только в правой полуплоскости, полиномы матрицы A_1, B_1 такие, что матрица

$$Z(s) = \begin{bmatrix} P(s) & -M(s) \\ A_1(s) & B_1(s) \end{bmatrix} \qquad (13)$$

аналитическая вместе с обратной в левой полуплоскости.

Далее, определив левое MFD представление, имеем:

$$(K_0 + K_+)\Gamma^{-1} = q^{-1}\nu \,. \qquad (14)$$

Зная, что $\det q$ - Гурвицев полином, получим окончательное выражение, где соотношение (11) принимает вид:

$$H = (\nu M - qWB_1)^{-1}(\nu P + qWA_1)\,, \qquad (15)$$

где

$$H_0 = (\nu M + qWB_1),\; H_1 = (\nu P + qWA_1)\,. \qquad (16)$$

Таким образом, имеется следующий алгоритм для определения коэффициентов соотношений (11) в виде:

Алгоритм:

1. Формируется матрица $A(s)$ из (1) и через MFD представлений находится P, M из (6).
2. Из (13) находятся такие A_1, B_1, что Z^{-1} является аналитической вместе с обратной в правой полуплоскости.
3. Факторизуя (12) находим матрицы W_γ, G.
4. Сепарируя выражение (12) находим $K_0 + K_+ + K_-$.
5. С помощью левой MFD представлений из (14) находятся полиномы q, ν.
6. Вычисляются коэффициенты W_0, W_1 из соотношений (15).

Более интересным является нахождение такой формулы, чтобы можно было уточнять H_0, H_1. Поэтому используем соотношение Андерсона - Мура [11] и используя MFD представлений выразим $P^{-1}M$ в следующем виде:

$$P^{-1}M = N_R D_R^{-1} \qquad (17)$$

Тогда легко доказывается [11], что H_0, H_1 $(H = H_0^{-1}H_1)$ удовлетворяют следующему условию оптимальности Андерсона - Мура [11]:

$$H_0 D_R + H_1 N_R = W . \qquad (18)$$

Таким образом, найденную из алгоритма H_0, H_1 вставим в (18); если не удовлетворяется решим полиномиальное уравнение (18), т.е. можно добавить в алгоритм следующий пункт 7:

7. С помощью (18) уточняется H_0, H_1.

Заключение.

Используя результат частотных методов синтеза приводится решение обратной задачи измерений. На основе факторизации полиномиальных и сепарации дробно-рациональных матриц приводится вычислительный алгоритм. Далее, на основе соотношения оптимальности Андерсона - Мура проводится уточнение коэффициентов соотношений, которое дает минимальное значение функционалу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ларин В.Б., Науменко К.И., Сунцев В.Н. Спектральные методы синтеза линейных систем с обратной связью. Киев: Наукова думка, 1971,137 с.
2. Солонченко Г.Н. Обратные задачи в измерительных процедурах. Измерение, контроль, автоматизация – 1983, №2 (46), с. 32-45.
3. Бассвиль М., Вилски А., Банвенист А. и др. Под ред. Бассвиль М., Банвеннист А. Обнаружение изменения свойств сигналов и динамических систем. М.: Мир, 1989, 278 с.
4. Абдуллаев И.М., Раджабов М.Ф., Мамедов Р.М. Синтез робастных корректирующих фильтров для повышения точности цифровых динамических измерений физических величин. УСиМ, №2, март-апрел, 2008, с. 36-40.
5. Абдуллаев И.М., Раджабов М.Ф. Применение параметризации при решении обратной задачи измерений. Доклад. НАН Азерб., 2008, №3, с. 40-45.
6. Раджабов М.Ф. Применение параметризации при решении дискретной обратной задачи измерений. Известия НАН Азерб., 2009, №3, с. 23-26.
7. Алиев Ф.А., Бордюг Б.А., Ларин В.Б., Шабанов М.Б. Частотные методы синтеза оптимальных систем. Препринт №1, АН Азерб. ССР, Инст. Физики, Баку: 1989, 90 с.
8. Алиев Ф.А., Ларин В.Б., Науменко К.И., Сунцев В.Н. Оптимизация линейных инвариантных во времени систем управления, Киев: Наукова думка, 1987, 320 с.
9. Youla D.C., Jaber H.A., Bonjiorno J.J. For modern Wiener-Hoof design of optimal controllers pt.2. The multivariable case. IEEE Trans. Autom. Control., 1976, V. 21, №3, p. 319-338.
10. Алиев Ф.А., Ларин В.Б. Параметризация множеств стабилизирующих регуляторов в механических системах. Прикладная механика, т. 44, №6, 2008, с. 3-28.
11. Aliev F.A., Larin V. B. Optimization of Linear Control Systems. Analytical Methods and Calculations Algorithms, Amsterdam, Cordon and Breach, 1998, 27 p.

ÇOXÖLÇÜLÜ TƏRS MÜŞAHİDƏ MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİ ÜÇÜN PARAMETRİZASİYA ALQORİTMİ

M.F.RƏCƏBOV

XÜLASƏ

Çoxölçülü hal üçün tərs müşahidə məsələsinə baxılır. Uyğun çevrilmələr nəticəsində tərs müşahidə məsələsinin həlli Viner-Xopf tənliyinin həllinə gətirilir. Daha sonra, polinomial matrislərin faktorizasiyası və kəsr-rasional matrislərin separasiyasından istifadə edərək tərs müşahidə məsələsinin həlli yerinə yetirilir.

ALGORITHM OF PARAMETRIZATION FOR THE SOLUTION OF MULTIDIMENSIONAL INVERSE PROBLEM OF MEASUREMENT

M.F.RAJABOV

SUMMARY

This article presents an inverse problem of measurement for the multidimensional case. The corresponding transformations lead the solution of the inverse problem of measurement to the solution of the Viner-Hopt equation. Further, the factorization of the polynomials and separation of the rational-fractional matrix give the solution of the inverse problem of measurement with the help of the parameterization for the construction of the optimal regulators.